第2回数学記述特訓

出典：focus gold Ⅰ+A 5th Edition Step Up 2次方程式と2次不等式　16番　****

素人考察

　定石問題である。共通解を別に定数として定めるという解法が一般的だが、その原理を十分に理解しておくことが重要だと思われる。同値変形(必要十分条件)をしっかりと考慮しながら解くことが良い。なお、本問題の解説の下に「やっておきたいもう一問」を掲載している。その解説欄に原理が掲載されているコラムを載せている。是非参照していただきたい。

解答解説

<考え方>　共通解を α として，2つの2次方程式に代入する．

共通解を α として，2つの2次方程式に $x=\alpha$ を代入すると，

$$\begin{cases} \alpha^2+m\alpha+m^2-7=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha^2-3\alpha-m-1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

この α，m についての連立方程式を解く．

①−② より，　$(m+3)\alpha+m^2+m-6=0$

$(m+3)\alpha+(m+3)(m-2)=0$

$(m+3)(\alpha+m-2)=0$

◀①−② より，α^2 の項が消える．

これより，　$m=-3$ または $\alpha=-m+2$

◀$AB=0 \Longleftrightarrow$ $A=0$ または $B=0$

(i)　$m=-3$ のとき

もとの2つの2次方程式は，ともに $x^2-3x+2=0$ となる．

したがって，解は，$x=1,\ 2$ となり，共通解がただ1つであることに反する．

◀共通解が2つになる．

(ii)　$\alpha=-m+2$ のとき

②に代入して，

◀mの値を求める．(①に代入してもよい．)

$(-m+2)^2-3(-m+2)-m-1=0$

$m^2-2m-3=0$

$(m+1)(m-3)=0$

これより，　$m=-1,\ 3$

(ア)　$m=-1$ のとき

もとの2つの2次方程式は，

$x^2-x-6=0,\quad x^2-3x=0$

となり，それぞれ，

$x=-2,\ 3,\quad x=0,\ 3$

となるから，ただ1つの共通解 3 をもつ．

◀共通解は $\alpha=-m+2=3$

(イ)　$m=3$ のとき

もとの2つの2次方程式は，

$x^2+3x+2=0,\quad x^2-3x-4=0$

となり，それぞれ，

$x=-1,\ -2,\quad x=-1,\ 4$

となるから，ただ1つの共通解 -1 をもつ．

◀共通解は $\alpha=-m+2=-1$

以上より，

$m=-1$ のとき，共通解は 3

$m=3$ のとき，共通解は -1

やっておきたいもう一問

x についての2つの2次方程式

$$x^2+(m-4)x-2=0,\quad x^2-2x-m=0$$

がただ1つの共通解をもつとき、定数 m と、そのときの共通解を求めよ。

素人考察

この問題では是非添付のコラムを読んで原理を再確認していただきたい。

解答解説

考え方 ただ1つの共通解が存在するというので，それを α とおくと扱いやすい．

解答 共通な実数解を α として，2つの2次方程式に $x=\alpha$ を代入すると，

$$\begin{cases}\alpha^2+(m-4)\alpha-2=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha^2-2\alpha-m=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

◀ α，m についての連立方程式になる．

この α，m についての連立方程式を解く．

①−② より，　$(m-2)\alpha+m-2=0$

$(m-2)(\alpha+1)=0$

◀ ①−② より，α^2 の項が消える．

これより，　$m=2$ または $\alpha=-1$

◀ 因数分解できる．

(i)　$m=2$ のとき

◀ $AB=0 \iff A=0$ または $B=0$

もとの2つの2次方程式は，ともに $x^2-2x-2=0$ となる．

したがって，解は，

$$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}=1\pm\sqrt{3}$$

◀ 共通な解が2つになる．

となり，共通な解がただ1つであることに反する．

(ii)　$\alpha=-1$ のとき

①に代入して，　$(-1)^2+(m-4)\cdot(-1)-2=0$

$m=3$

◀ ②に代入してもよい．

このとき，もとの2つの2次方程式は，

$$x^2-x-2=0,\quad x^2-2x-3=0$$

となり，それぞれ，

$(x-2)(x+1)=0$ より，　$x=2,\ -1$

$(x-3)(x+1)=0$ より，　$x=3,\ -1$

◀ $m=3$ のとき，2つの2次方程式が $x=-1$ を解にもち，他の解は異なることを確認する．

となるから，ただ1つの共通解 -1 をもつ．

よって，(i)，(ii)より，　**$m=3$，共通解は -1**

Focus

共通解を α とおいて，2つの方程式へ代入し，連立方程式を解く

注 元の方程式の x は「方程式の未知数」であるのに対し，α は「解を表す定数」を表している．これらの文字の意味の違いにも注意する．

コラム　「共通解について」

共通解と同値性について

例題 53＜共通解＞($p.119$) の解答を読んで，どう感じたであろうか？

確かに 1 行 1 行の式変形については何の問題もないが，おそらく多くの人は「一体何をやっているのか良くわからない」と感じるのではないだろうか？

とくに共通解を $x=\alpha$ とおいて 2 つの 2 次方程式に代入し，それらの式を①，②とおいたあと，いきなり ①－② という式が出てきて，その後場合分けをして解くことになるが，この ①－② が一体何なのか，スッキリしない部分がある．

そこで，ここでは第 3 章「集合と命題」で扱う必要十分条件（同値）という考え方に意識をおいてもう少し丁寧な解答を考えてみたい．（必要十分条件（同値）を学んだあとで構わないので，ぜひふり返って欲しい．）

＜例題 53 について「同値性」を意識した解答＞

解答　2 つの 2 次方程式を

$$\begin{cases} x^2+(m-4)x-2=0 & \cdots\cdots① \\ x^2-2x-m=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおく．すると，①－② より，

$$(m-2)x+(m-2)=0$$

$$(m-2)(x+1)=0 \quad \cdots\cdots③$$

①－② より，③を得ることができ，逆に ①－③ を作ると②が得られる．

したがって，　①かつ② $\Longleftrightarrow$ ①かつ③

つまり，　①と②が共通解をもつ $\Longleftrightarrow$ ①と③が共通解をもつ

(ア)　$m-2\neq 0$ のとき，

③ $\Longleftrightarrow$ $x+1=0$

したがって，③は $x=-1$ という唯一の解をもつので，この解が①を満たさなければならない．

よって，①に代入すると，$(-1)^2+(m-4)\cdot(-1)-2=0$ だから，$m=3$

これは $m-2\neq 0$ を満たす．

(イ)　$m-2=0$ のとき，

③は任意の x で成り立ち（任意の値を解にもち），$m=2$ のとき，①は $x^2-2x-2=0$ となる．ここで，解は $x=1\pm\sqrt{3}$ となり，共通な解が 2 つとなるので不適．

よって，(ア)，(イ)より，　$m=3$，共通解は -1

<２つの方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ が共通解をもつときの考え方>

(方法①)　例題 53 の解答にある考え方

(i)　$mf(\alpha)+ng(\alpha)=0$ を満たす α を求める (必要条件)

(ii)　(i)を満たす α に対して，$f(\alpha)=0$，$g(\alpha)=0$ の成立を吟味する (十分条件)

ここで注意するのは(ii)の十分条件のチェックである.

(方法②)　前ページにある考え方

$f(x)=0$ ……①，$g(x)=0$ ……②　とすると，

$$Af(x)+Bg(x)=0\ (AB\neq 0)\ \cdots\cdots③$$

①かつ② $\Longrightarrow$ ③，逆に，①かつ③ $\Longrightarrow$ ②

したがって，　①かつ② $\Longleftrightarrow$ ①かつ③

よって，　①，②の共通解 $\Longleftrightarrow$ ①，③の共通解

ここで大切なことは，③をできるだけ簡単な式 (ここでは x の１次方程式) となるように定数 A，B を選ぶことである.

$f(x)$，$g(x)$ が x の整式のときは，最高次の項もしくは定数項を消去するように A，B を決めるとよい.（１回の変形でうまくいかない場合はさらにくり返すとよい.）

<補足>

以上の話を読んで，次のようなことを考えた人はいないだろうか.

「ということは２つの２次方程式があって，それらを互いに引き算してできた１次方程式の解は２つの方程式の共通解になるのか？」

この考えはすぐにおかしいことに気付く．実際に例を挙げれば，

$$\begin{cases} x^2-x-2=0 & \cdots\cdots① \\ x^2-2x-3=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①－② を計算すると，　$x+1=0$ より，　$x=-1$

これは確かに①，②の共通解である (例題 53 の場合) が，

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0 & \cdots\cdots③ \\ x^2+x-2=0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

③－④ を計算すると，　$-6x+8=0$ より，　$x=\dfrac{4}{3}$

これは③，④のいずれの解でもない.

すると，「引いてできた１次方程式の解が共通解になるのはどんな場合だろうか？」という新たな疑問が出る.

こうして色々な考えを広げていくことが勉強である.