第1回数学記述特訓

2026/04/06

出典：focus gold Ⅰ+A 5th Edition 例題88 2つの放物線の位置関係　****

素人考察

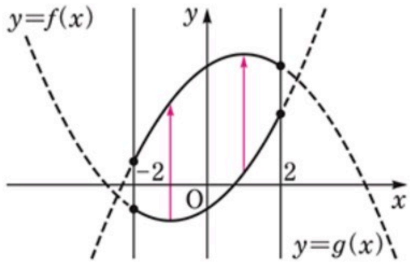
　そもそも問題文の意味を理解することが肝となるであろう。問題文を理解したのち、実験して条件を詰めていくことが最善だと思われる。問題自体、難しいというわけではないが、しっかりと状況を整理しないとややこしいであろう。また、記述もどう書けば良いのか複雑なところもあるだろう。

解答解説

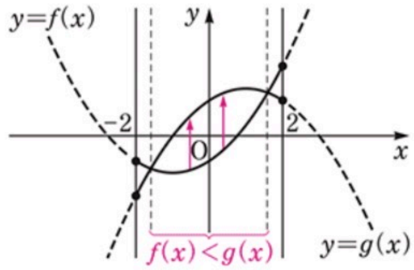
考え方　グラフをかいて，$f(x)$ と $g(x)$ の位置関係をイメージする．また，「すべて」と「ある」については，第3章「集合と命題」で詳しく解説している．

(1)と(2)は $f(x)$，$g(x)$ に同じ x の値を代入したときの大小を比較している．

(1)　$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲のどの x の値に対しても，**つねに** $f(x)<g(x)$ であることと，この区間で，$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフよりつねに上側にあることは同じ．



(2)　$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x)<g(x)$ を満たす x の値が存在することと，この区間で，$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフより上側になる部分がどこかにあることは同じ．



$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと，(1)は，$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲のどのような x の値でも $f(x)<g(x)$，つまり，$h(x)>0$ であることが条件である．

(2)は，$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)<g(x)$，つまり，$h(x)>0$ となる x の値が存在することが条件である．

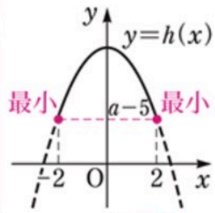
解答　$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと，

$$h(x)=(-x^2+2x+a+1)-(x^2+2x-2)$$
$$=-2x^2+a+3$$

◀ $h(x)>0$ のとき，$g(x)>f(x)$ つまり，$g(x)$ は $f(x)$ の上側．

(1)　$-2 \leqq x \leqq 2$ のすべての x に対して，$h(x)>0$ となる条件は，この区間における $h(x)$ の最小値が 0 より大きくなることである．

　$y=h(x)$ のグラフは，上に凸で，軸が直線 $x=0$ であるから，$x=-2$ と $x=2$ で最小値をとる．

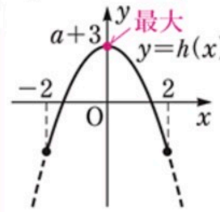


　よって，　$h(-2)=-2\cdot(-2)^2+a+3=a-5$
　　　　　　$h(2)=-2\cdot 2^2+a+3=a-5$

より，$a-5>0$　つまり，　$\boldsymbol{a>5}$

(2)　$-2 \leqq x \leqq 2$ のある x に対して，$h(x)>0$ となる条件は，この区間における $h(x)$ の最大値が 0 より大きくなることである．

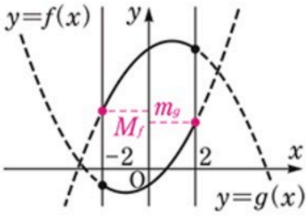
　$y=h(x)$ のグラフは上に凸で，軸が $x=0$ より，$x=0$ で最大値をとる．



　よって，$h(0)=a+3>0$ より，　$\boldsymbol{a>-3}$

考え方 (3)，(4)は $f(x)$ と $g(x)$ にそれぞれ違う x の値を代入してもよいという意味である．
$-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値を M_f，最小値を m_f，
$g(x)$ の最大値を M_g，最小値を m_g とすると，

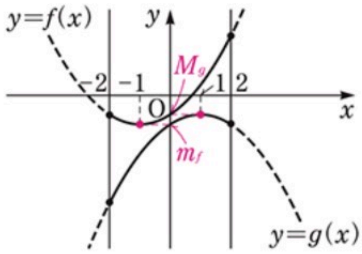
(3) $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲のどの $f(x_1)$ に対しても $g(x_2)$ がつねに上側にあることと，この区間での $g(x)$ の最小値 m_g が $f(x)$ の最大値 M_f より大きいことは同じ．



←M_f よりも m_g が大きいとき，
$y=g(x)$ のグラフ上のすべての点は，
$y=f(x)$ のグラフ上のすべての点よりも
上側であるから，すべての組 x_1，x_2 に対して，$f(x_1) < g(x_2)$ となる．

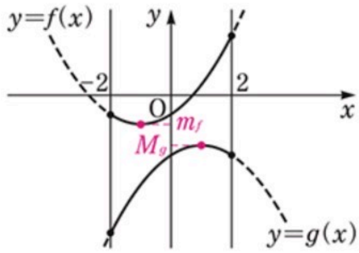
(4) $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x_1) < g(x_2)$ を満たす x_1，x_2 が少なくとも1組存在することと，この区間での $g(x)$ の最大値 M_g が $f(x)$ の最小値 m_f より大きいことは同じ．

$M_g > m_f$ の場合



少なくとも $x_1=-1$，$x_2=1$ に対して，$f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つ．

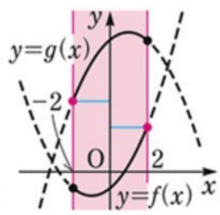
$M_g \leqq m_f$ の場合



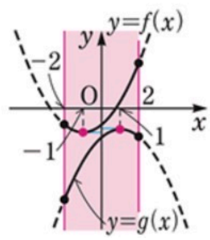
$f(x_1) < g(x_2)$ となる x_1，x_2 が1組も存在しない．（つねに $f(x_1) \geqq g(x_2)$）

解答 $f(x) = x^2+2x-2 = (x+1)^2-3$
$g(x) = -x^2+2x+a+1 = -(x-1)^2+a+2$
したがって，$-2 \leqq x \leqq 2$ において，
$f(x)$ の最大値　$f(2) = (2+1)^2-3 = 6$
　　　最小値　$f(-1) = -3$
$g(x)$ の最大値　$g(1) = a+2$
　　　最小値　$g(-2) = -(-2-1)^2+a+2 = a-7$

(3) $g(x)$ の最小値が $f(x)$ の最大値より大きいこと，
つまり，$g(-2) > f(2)$ となることが条件である．
よって，$a-7 > 6$ より，　$\boldsymbol{a > 13}$



(4) $g(x)$ の最大値が $f(x)$ の最小値より大きいこと，
つまり，$g(1) > f(-1)$ となることが条件である．
よって，$a+2 > -3$ より，　$\boldsymbol{a > -5}$



やってておきたいもう一問

　方程式 $(k+1)x^2-2(k-2)x+(k+1)=0$ の実数解の個数は, k の値によって, どのように変わるか調べよ.

素人考察

　判別式が2次式だと使えないことをあらためておく。そのため、$k+1=0$ の場合を別で考えなければいけない点に注意。

解答解説

(1)　(i)　$k+1=0$　つまり，$k=-1$ のとき

$6x=0$　より，　$x=0$

実数解は 1 個

(ii)　$k+1\neq 0$　つまり，$k\neq -1$ のとき

2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k+1)^2$$
$$=k^2-4k+4-(k^2+2k+1)$$
$$=-6k+3=-3(2k-1)$$

$D>0$ つまり，$k<\frac{1}{2}$ のとき，

異なる 2 つの実数解をもつ.

$D=0$ つまり，$k=\frac{1}{2}$ のとき，

ただ 1 つの実数解（重解）をもつ.

$D<0$ つまり，$k>\frac{1}{2}$ のとき，

実数解をもたない.

よって，(i)，(ii)より，実数解の個数は，

$k<-1$, $-1<k<\frac{1}{2}$ のとき，2 個

$k=-1$, $\frac{1}{2}$ のとき，1 個

$k>\frac{1}{2}$ のとき，0 個